Printed Pages– 8

H-5139

B. Sc. B. Ed. (Third Semester) Examination, Dec. 2022

MATHEMATICS

Paper : Third M-3.1 (Elective-III)

(Advance Calculus)

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 30

Minimum Pass Marks : 11

नोट : *प्रत्येक इकाई से दो प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान है।*

Note : Two questions from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I
Unit-I

1. सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

Prove that every convergent sequence is bounded.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम अभिसारी होता है यदि और केवल यदि वह कौशी अनुक्रम है।

Prove that a sequence of real numbers is convergent if and only if it is a Cauchy sequence.

2. श्रेणी $x+\frac{3}{5}x^2+\frac{8}{10}x^3+\frac{15}{17}x^4+.....+\frac{n^2-1}{n^2+1}x^n+.....,$ $x>0$ की अभिसारिता या अपसारिता का परीक्षण कीजिए

Test for convergence or divergence of the following series

$$x+\frac{3}{5}x^2+\frac{8}{10}x^3+\frac{15}{17}x^4+.....+\frac{n^2-1}{n^2+1}x^n+.....,$$

$x>0$

अथवा

Or

सिद्ध करिये कि

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[(n+1)(n+2).....(n+n)^{1/n}\right]}{n}=\frac{4}{e}$$

Prove that

$$\lim \frac{\left[(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+n)^{\frac{1}{n}}\right]}{n} = \frac{4}{e}$$

इकाई-II
Unit-II

3. दर्शाइये कि निम्न फलन $x=1$ पर असंतत है जहाँ

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{यदि} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{यदि} \quad x = 1 \end{cases}$$

Show that the following function is discontinuous at $x=1$.

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{if} \quad x \neq 1 \\ 2 & \text{if} \quad x = 1 \end{cases}$$

अथवा

Or

दर्शाइये कि निम्न फलन

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{जब} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{जब} \quad x = 0 \end{cases}$$

बिन्दु $x=0$ पर संतत् एवं अवकलनीय है।

Show that the following function

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{when} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{when} \quad x = 0 \end{cases}$$

is continuous and differentiable at $x=0$.

4. टेलर प्रमेय $F(x,y)$ का कथन लिखिए व सिद्ध करिए।

State and prove Taylor theorem for $F(x,y)$.

अथवा

Or

लैग्रान्जे मध्यमान प्रमेय का कथन लिखिए एवं सिद्ध करें।

State and prove Lagrange's mean value theorem.

इकाई-III
Unit-III

5. यदि $u=\log\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right)$ तो दर्शाइये कि

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3$$

If $u=\log\left(\frac{x^4+y^4}{x+y}\right)$, then show that

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=3$$

अथवा

Or

समीकरण $\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+y=0$ को रूपान्तरित कीजिए, जहाँ $x=\tan z, z$ स्वतंत्र चर है।

Transform the equation

$$\left(1+x^2\right)\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+y=0$$

where $x=\tan z$ and z is independent variable

6. यदि $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta$ तो दर्शाइये कि

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$$

If $x=r\sin\theta\cos\phi, y=r\sin\theta\sin\phi, z=r\cos\theta$. then show that

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}=r^2\sin\theta$$

अथवा

Or

फलन $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ का $(x-2)$ और $(y-3)$ के घातों में प्रसार कीजिए।

Expand the function $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ in the power of $(x-2)$ and $(y-3)$.

इकाई-IV
Unit-IV

7. फलन $u=xy+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}$ के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मानों की विवेचना कीजिये।

Discuss maxima and minima of the function given by

$$u=xy+\frac{a^3}{x}+\frac{a^3}{y}$$

अथवा

Or

फलन $x^3y^2(1-x-y)$ के उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ मान प्राप्त कीजिए।

Find the maxima and minima values of function $x^3y^2(1-x-y)$.

8. किसी त्रिभुज ABC में, $\cos A \cos B \cos C$ का उच्चिष्ठ मान लैग्रान्जे विधि द्वारा ज्ञात करें।

By using Lagrange's method find the maxima of $\cos A \cos B \cos C$ in any triangle ABC.

अथवा

Or

$u = x^2 + y^2 + z^2$ का उच्चिष्ठ व निम्निष्ठ ज्ञात करो जबकि $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

Find the maxima & minima of $u = x^2 + y^2 + z^2$ if $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$.

इकाई-V
Unit-V

9. दर्शाइये कि

$$\beta(m, n) = \frac{\lceil m \lceil n}{2\lceil m+n}, (m, n > 0)$$

Prove that

$$\beta(m, n) = \frac{\lceil m \lceil n}{2\lceil m+n}, (m, n > 0)$$

अथवा

Or

दर्शाइये कि

$$\lceil \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

Prove that

$$\lceil \frac{1}{2} = \sqrt{\pi}$$

10. सिद्ध करो

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$$

Prove that

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}$$

अथवा

Or

मान ज्ञात कीजिए—

$$\int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$

Find the value of

$$\int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} (x^2 + y^2 + z^2)\, dz\, dy\, dx$$