

I-5479

**B. Sc. B. Ed. (Second Semester)
Examination, May-June 2024**

MATHEMATICS

***Paper : (M-2-2) (Elective-III)
(3-D Geometry)***

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 30

Minimum Pass Marks : 11

नोट : किन्हीं पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिये। प्रत्येक इकाई से एक प्रश्न करना अनिवार्य है। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Attempt any five questions. One question from each unit is compulsory. All questions carry equal marks.

इकाई-I

Unit-I

1. (a) दिए गए शंकव की प्रकृति व केन्द्र ज्ञात कीजिये।

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

[2]

Find the nature and centre of given conic.

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

अथवा

Or

दिए गए शांकव की प्रकृति, केन्द्र एवं अनन्तस्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिये।

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

Find the nature, centre and asymptotes of given conic.

$$14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$$

(b) दिए गए शांकव का अनुरेखण कीजिए तथा उसकी नियताएँ ज्ञात कीजिए।

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

Trace the conic and find its directrix :

$$17x^2 - 12xy + 8y^2 + 46x - 28y + 17 = 0$$

अथवा

Or

शाकं व का अनुरेखण कीजिए व इसकी नाभियों के निर्देशांक व उत्केन्द्रिता ज्ञात कीजिए।

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

Trace the conic and find the coordination of foci and ecentricity :

$$x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y = 0$$

2. (a) वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब द्विघाती व्यापक समीकरण एक शंकु को निरूपित करता है।

Find the condition for a general equation of second degree to represent a cone.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिये कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु से

खींचे गए अतिपरवलय को समीकरण जिसका उत्केन्द्र कोण α है, और दीर्घवृत्त से सानभि है, होगा

$$\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = a^2 - b^2$$

Prove that the equation of the hyperbola drawn

from the point of ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ whose

eccentricity angle is α and also confocal to the

ellipse will be $\frac{x^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{y^2}{\sin^2 \alpha} = a^2 - b^2$.

- (b) शांकव का अनुरेखण कीजिए तथा नियता का समीकरण ज्ञात कीजिये।

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$$

Trace the conic

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 6y + 5 = 0$$

and find the equation of directrix.

इकाई-II

Unit-II

3. (a) सिद्ध कीजिए कि समीकरण

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \text{and} \quad \frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$$

एक ही शांकव को निरूपित करते हैं।

Prove that the equation

$$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta \quad \text{and} \quad \frac{l}{r} = -1 + e \cos \theta$$

represents the same conic.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि रेखा $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ शांकव

$\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ को स्पर्श करेगी यदि

$$(A - e)^2 + B^2 = 1$$

Prove that the line $\frac{l}{r} = A \cos \theta + B \sin \theta$ touches

the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ if $(A - e)^2 + B^2 = 1$

- (b) शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए। जबकि नाभि ध्रुव है और अक्ष, आदि रेखा से कोण α पर झुकी है।

Find the polar equation of a conic when pole is focus and axis is inclined at angle α with initial line.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि शांकव की किसी नाभीय जीवा के खण्डों के व्युत्क्रमों का योगफल अचर होता है।

Prove that the sum of the reciprocal of the segments of a focal chord of a conic is a constant.

4. (a) सिद्ध कीजिये कि शांकव

$$\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta \quad \text{अथवा} \quad \frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$$

एक दूसरे को स्पर्श करते हैं यदि

$$l_1^2 (1 - e_2^2) + l_2^2 (1 - e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

Prove that conic

$$\frac{l_1}{r} = 1 + e_1 \cos \theta \quad \text{and} \quad \frac{l_2}{r} = 1 + e_2 \cos(\theta - \alpha)$$

touches each other if

$$l_1^2 (1 - e_2^2) + l_2^2 (1 - e_1^2) = 2l_1 l_2 (1 - e_1 e_2 \cos \alpha)$$

अथवा

Or

PSP^1 और QSQ^1 किसी शांकव की लम्बरूप नाभीय

जीवाएँ हैं। तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{PS \cdot SP^1} + \frac{1}{QS \cdot SQ^1}$

अचर है।

If PSP^1 and QSQ^1 are perpendicular focal chords

of any conic. Then prove that $\frac{1}{PS \cdot SP^1} +$

$\frac{1}{QS \cdot SQ^1}$ is constant.

(b) शांकव का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात कीजिए। जबकि नाभि

ध्रुव है तथा अक्ष प्रारम्भिक रेखा है।

Find polar equation of a conic, if pole is at focus and axis be the initial line.

अथवा

Or

शांकव की नियता का ध्रुवीय समीकरण ज्ञात करें।

Find the polar equation of directrix of conic.

इकाई-III

Unit-III

5. (a) समतल $lx + my + nz = p$ को शांकवज

$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात करें।

Find the condition of tangency of the plane

$lx + my + nz = p$ to conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$

अथवा

Or

सरल रेखाओं $3x - 3y + 6z - 5 = 0$, $x + 9y$

$-3z = 0$ से जाने वाले शांकवज $2x^2 - 6y^2 - 3z^2 = 5$

के स्पर्श तलों का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of the tangent planes of conicoid

$2x^2 - 6y^2 - 3z^2 = 5$ passing through the straight

lines $3x - 3y + 6z - 5 = 0$, $x + 9y - 3z = 0$.

(b) शांकवज $2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ के बिन्दु

$(1, 0, -1)$ पर स्पर्शी तल के समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent planes of conicoid

$2x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 5$ at point $(1, 0, -1)$.

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि समतल $x + 2y - 2z = 4$ परवलयज

$3x^2 + 4y = 24z$ को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु के

निर्देशांक ज्ञात करो।

Prove that the plane $x + 2y - 2z = 4$ touches the

paraboloid $3x^2 + 4y = 24z$. Also find co-

PTO

ordinates of contact point.

6. (a) दर्शाइये कि सामान्यतः एक दत्त बिन्दु से एक परवलयज पर पांच अभिलम्ब रेखाएँ खींची जा सकती हैं।

Show that in general five normal lines can be drawn from a given point on a paraboloid.

अथवा

Or

दिये परवलयज के बिन्दु (4, 3, 5) पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए।

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = z$$

Find the equation of normal to paraboloid

$$\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = z \text{ at point } (4, 3, 5)$$

- (b) शांकवज के अन्वालोसी बेलन का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of enveloping cylinder to a conicoid.

अथवा

Or

दर्शाइये कि समतल $3x + 12y - 6z = 17$ शांकवज

$3x^2 - 6y^2 + 9z^2 + 17 = 0$ को स्पर्श करता है। स्पर्श

बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

Show that plane $3x + 12y - 6z = 17$, touches the

conicoid $3x^2 - 6y^2 + 9z^2 + 17 = 0$. Also find the

co-ordinates of point of contact.

इकाई-IV

Unit-IV

7. (a) शांकवज $3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz = 4$ के वास्तविक

वृत्तीय परिच्छेदों को ज्ञात कीजिए।

Find the real circular sections of conicoid

$3x^2 + 5y^2 + 3z^2 + 2xz = 4$.

अथवा

Or

उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जो परवलयज

$53x^2 + 4y^2 = 8z$ तथा समतल $7x + 2z = 5$ के प्रतिच्छेद से प्राप्त होती है।

Find the radius of the circle which is obtained from the intersection of the paraboloid

$53x^2 + 4y^2 = 8z$ with the plane $7x + 2z = 5$.

(b) सिद्ध कीजिए कि शंकु $\frac{x^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ के

स्पर्श तल से शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ का परिच्छेद

शांकव एक आयताकार परवलय है।

Prove that section of conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$

to the tangent plane of cone

$\frac{ax^2}{b+c} + \frac{y^2}{c+a} + \frac{z^2}{a+b} = 0$ is a rectangular

parabola.

अथवा

Or

शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के बिन्दु (α, β, γ) पर स्पर्शतल का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Find the equation of tangent plane of conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ point (α, β, γ) .

8. (a) बिन्दु (α, β, γ) से शांकवज $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ पर स्पर्श तक खींचे जाते हैं। सिद्ध कीजिए कि मूल बिन्दु से इस पर खींची गई अभिलम्ब रेखा शंकु का जनन करेगी।

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

Tangent planes are drawn from point (α, β, γ) to conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. Prove that the normal drawn from the origin to this will be generator of cone

$$(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c}$$

अथवा

Or

सिद्ध कीजिए कि समतल $x + y + z = 0$ से दीर्घवृत्तज $9x^2 + 6y^2 + 14z^2$ के परिच्छेद से बने दीर्घवृत्त के

अर्द्धअक्षों की लम्बाइयाँ $\frac{1}{2}$ तथा $\frac{3}{\sqrt{22}}$ है।

Prove that the section of ellipsoid $9x^2 + 6y^2 + 14z^2$ the plane $x + y + z = 0$ is an ellipse with semi axis $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{\sqrt{22}}$.

(b) परवलयज $x^2 + 10z^2 = 2y$ के वृत्तीय परिच्छेद ज्ञात करें।

Find circular sections of paraboloid $x^2 + 10z^2 = 2y$.

अथवा

Or

दीर्घवृत्तज $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ के शून्य वृत्तक ज्ञात

कीजिए।

Find umbilics of ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

इकाई-V

Unit-V

9. समीकरण $2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy - x - 2y + 3z - 2 = 0$

का विहित रूप में समानयन कीजिए तथा प्रदर्शित पृष्ठ का स्वरूप ज्ञात कीजिए।

Reduce the equation $2y^2 - 2yz + 2zx - 2xy$

$-x - 2y + 3z - 2 = 0$ in canonical form and find the

nature of the surface represented by it.

अथवा

Or

10. समीकरण

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + x - 4y + z + 1 = 0$$

का विहित रूप में समानयन कीजिए तथा प्रदर्शित पृष्ठ की प्रकृति ज्ञात कीजिए

Reduce

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2yz + 2zx + x - 4y + z + 1 = 0$$

in canonical form and find the nature of the surface represented by it .